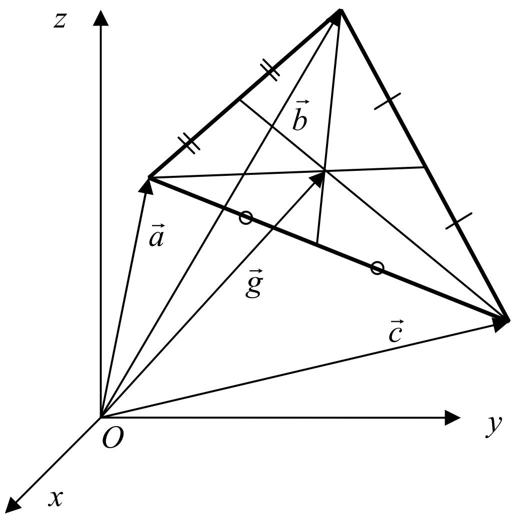
수리 지구물리 중간시험

강원대학교 지구물리학과 이훈열 교수

2004년 10월 13일 오후 4시-6시

1. 삼각형의 세 꼭지점이 다음과 같이 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 위치 벡터로 주어졌다.

   (a) 무게 중심 $\vec{g}$를 구하시오. (무게 중심은 세 중선의 교선으로서, 각 중선은 다른 중선을 2:1로 나눈다. 이 때, 중선이란 한 꼭지점에서 대변을 이등분하는 점을 이은 선이다.) (5점)



   (b) $\vec{a} = (2,1,0), \vec{b} = (4,2,1), \vec{c} = (3,1,2)$ 일때, 무게중심 $\vec{g}$를 구하시오. (2점)

2. 어떤 $\vec{a}$에 대하여 다음과 같은 방정식을 만족하는 위치벡터 $\vec{r}$을 설명하시오.

   (a) $|\vec{r} - \vec{a}| = |\vec{a}|$ (3점)

   (b) $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{a} = 0$ (3점)

   (c) $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{r} = 0$ (3점)

3. 위치벡터 $\vec{r}=(x,y,z)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 에 대하여 다음을 증명하시오.

(a) $\vec{\nabla}r=\hat{r}$ ($\hat{r}$ 은 unit vector) (3점)

(b) $\vec{\nabla}\cdot\vec{r}=3$ (3점)

(c) $\vec{\nabla}\times\vec{r}=0$ (3점)

4. 임의의 함수 φ 와 벡터 $\vec{V}=(V_x,V_y,V_z)$ 에 대하여 다음을 증명하시오.

(a) $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi=0$ (3점)

(b) $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{V}=0$ (3점)

5. 아래의 함수를 주어진 경로에 따라 적분하시오.

$$\vec{F}(x,y)=x\hat{x}-2y\hat{y}$$

(a) (0, 0) → (1, 0) → (1, 1) (5점)

(b) (0, 0) → (0, 1) → (1, 1) (5점)

6. Spherical Polar Coordinate (SPC)의 좌표 (r,θ,φ) 가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$r=(x^2+y^2+z^2) \qquad x=r\sin\theta\cos\varphi$$
$$\theta=\cos^{-1}(z/r) \qquad y=r\sin\theta\sin\varphi$$
$$\varphi=\tan^{-1}(y/x) \qquad z=r\cos\theta$$

(a) r,θ,φ 의 영역을 구하시오. (2점)

(b) $g_{ij}=\sum_l \frac{\partial x_l}{\partial q_i}\frac{\partial x_l}{\partial q_j}$ 을 이용하여 scale factor h_1,h_2,h_3 을 구하시오. (5점)

(c) $i\neq j$, $g_{ij}=0$ 임을, 한가지 예를 들어 보이시오. (3점)

(d) $\hat{q}_i=\frac{1}{h_i}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}$ 공식을 이용하여, 단위 벡터 $\hat{r},\hat{\theta},\hat{\varphi}$ 를 Cartesian Coordinate의 단위벡터인 $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$ 로 나타내시오. (2점)

(e) $\vec{\nabla}\psi=\sum_i \hat{q}_i\frac{1}{h_i}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}$ 공식을 이용하여 $\vec{\nabla}\psi$ 를 SPC에서 나타내시오. (2점)

(f) $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(V_1h_2h_3)+\frac{\partial}{\partial q_2}(V_2h_3h_1)+\frac{\partial}{\partial q_3}(V_3h_1h_2)\right]$ 공식을 이용하여

SPC 상의 벡터인 $\vec{V} = (V_r, V_\theta, V_\varphi)$ 에 대한 $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ 를 나타내시오. (2점)

7. Gauss-Jordan Elimination을 이용하여 다음 행렬의 역행렬을 구하시오. 이 때, 검산 과정을 반드시 포함시키시오. (10점)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

8. 다음 행렬 A 의 eigenvalue λ 와 eigenvector $\vec{r}$ 을 찾고, 이들의 기하학적 의미를 설명하시오. 이 때, $trace(A) = \sum_i \lambda_i$ 를 만족하는지, 그리고 eigenvector 들이 서로 직교하는지 확인하시오. (10점)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9. 다음 수열들의 수렴 여부를 판단하시오.
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ (5점)
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$ (5점)

10. 함수 $f(x) = \ln(1+x)$ 를 Maclaurin Expansion으로 표현하고, 수렴할 조건을 구하시오. 이를 이용하여 Alternating Harmonic Series인 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots\cdots$ 의 정확한 값을 구하시오. (10점)

11. 이 수업의 내용 및 진행에 대한 의견과 개선할 점에 대하여 쓰시오. (3점)

수고하셨습니다.