수리지구물리 및 연습 중간시험

강원대학교 지구물리학과 이훈열 교수

2005년 10월 26일 오후 2시-4시

1. 임의의 벡터 $\vec{A}$, $\vec{B}$에 대하여 $\vec{A}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=0$이 됨을 증명하시오. (5점)

2. $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$ 와 $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$ 등의 공식을 이용하여 다음을 증명하시오. (5점)

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D})=(\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D})-(\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$$

3. 임의의 스칼라 함수 φ에 대하여 $\vec{\nabla}\times(\varphi\vec{\nabla}\varphi)=0$이 됨을 증명하시오. (5점)

4. $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$일 때, 면적분 $\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{\sigma}=0$이 됨을 Gauss' Theorem을 이용하여 증명하시오. (5점)

5. $\vec{V}=\vec{\nabla}\varphi$ 일 때 선적분 $\oint \vec{V}\cdot d\vec{s}=0$이 됨을 Stokes' Theorem을 이용하여 증명하시오. (5점)

6. Spherical Polar Coordinate의 좌표 (r,θ,φ)가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$r=(x^2+y^2+z^2) \qquad x=r\sin\theta\cos\varphi$$
$$\theta=\cos^{-1}(z/r) \qquad y=r\sin\theta\sin\varphi$$
$$\varphi=\tan^{-1}(y/x) \qquad z=r\cos\theta$$

   (a) r,θ,φ의 영역을 구하시오. (5점)

   (b) $g_{ij}=\sum_l \frac{\partial x_l}{\partial q_i}\frac{\partial x_l}{\partial q_j}$을 이용하여 Scale factor h_1,h_2,h_3을 구하시오. (5점)

   (c) $g_{ij}=0$, $(i\neq j)$임을 증명하시오. (5점)

   (d) $\hat{q}_i=\frac{1}{h_i}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}$ 공식을 이용하여, 단위 벡터 $\hat{r},\hat{\theta},\hat{\varphi}$를 Cartesian Coordinate의 단위벡터인 $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$로 나타내시오. (5점)

   (e) $\vec{\nabla}\psi=\sum_i \hat{q}_i\frac{1}{h_i}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}$를 이용하여 $\vec{\nabla}\psi$ Spherical Polar Coordinate에서 나타내시오. (5점)

(f) $\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(V_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(V_3 h_1 h_2)\right]$ 를 이용하여, Spherical Polar Coordinate 상의 벡터인 $\vec{V} = (V_r, V_\theta, V_\varphi)$ 에 대한 $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$ 를 나타내시오. (5점)

(g) $\vec{\nabla}\times\vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} \hat{q}_1 h_1 & \hat{q}_2 h_2 & \hat{q}_3 h_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 V_1 & h_2 V_2 & h_3 V_3 \end{vmatrix}$ 을 이용하여 Spherical Polar Coordinate 상의 벡터인 $\vec{V} = (V_r, V_\theta, V_\varphi)$ 에 대한 $\vec{\nabla}\times\vec{V}$ 를 나타내시오. (5점)

7. Gauss-Jordan Elimination을 이용하여 다음 행렬의 역행렬을 구하시오. 이 때, 검산 과정을 반드시 포함시키시오. (10점)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

8. 다음 행렬 A 의 eigenvalue λ 와 eigenvector를 찾고, 이들의 기하학적 의미를 설명하시오. 이 때, $trace(A) = \sum_i \lambda_i$ 를 만족하는지, 그리고 eigenvector들이 서로 직교하는지 확인하시오. (10점)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^{n+1}}$ 의 수렴 여부를 판단하시오. (10점)

10. 함수 $f(x) = e^{2x+1}$ 를 Maclaurin Expansion으로 표현하고, 수렴할 조건을 구하시오. (10점)