공업수학 및 연습 중간시험

강원대학교 지구물리학과 이훈열 교수

2006년 10월 24일 오후 5시-7시

1. 위치벡터 $\vec{r}=(x,y,z)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 에 대하여 다음을 증명하시오 (10점).

   (a) $\vec{\nabla} r=\hat{r}$ ($\hat{r}$ 은 unit vector)

   (b) $\vec{\nabla}\cdot\vec{r}=3$

   (c) $\vec{\nabla}\times\vec{r}=0$

2. 임의의 함수 φ 와 벡터 $\vec{V}$ 에 대하여 다음을 증명하시오 (10점).

   (a) $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi=0$

   (b) $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{V}=0$

3. Circular Cylinder Coordinate (ρ,φ,z) 가 다음과 같이 정의되어 있다 (40점).

$$\rho=(x^2+y^2)^{1/2} \qquad x=\rho\cos\varphi$$
$$\varphi=\tan^{-1}(y/x) \qquad y=\rho\sin\varphi$$
$$z=z \qquad z=z$$

   (a) ρ,φ,z 의 영역을 그림을 그려 구하시오.

   (b) $g_{ij}=\sum_l \frac{\partial x_l}{\partial q_i}\frac{\partial x_l}{\partial q_j}$ 을 이용하여 scale factor h_1,h_2,h_3 을 구하시오.

   (c) $g_{ij}=0$, $(i\neq j)$ 임을 증명하시오.

   (d) $\hat{q}_i=\frac{1}{h_i}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}$ 공식을 이용하여, 단위 벡터 $\hat{\rho},\hat{\varphi},\hat{z}$ 를 Cartesian Coordinate의 단위벡터인 $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$ 로 나타내시오.

   (e) $\vec{\nabla}\psi=\sum_i \hat{q}_i\frac{1}{h_i}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}$ 를 이용하여 $\vec{\nabla}\psi$ 를 Circular Cylinder Coordinate에서 나타내시오.

   (f) $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(V_1h_2h_3)+\frac{\partial}{\partial q_2}(V_2h_3h_1)+\frac{\partial}{\partial q_3}(V_3h_1h_2)\right]$ 를 이용하여, Circular Cylinder Coordinate 상의 벡터인 $\vec{V}=(V_r,V_\theta,V_\varphi)$ 에 대한 $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$ 를 나타내시오.

(g) $\vec{\nabla}\times\vec{V} = \dfrac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} \hat{q}_1h_1 & \hat{q}_2h_2 & \hat{q}_3h_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1V_1 & h_2V_2 & h_3V_3 \end{vmatrix}$ 을 이용하여 Circular Cylinder Coordinate 상의 벡터인 $\vec{V} = (V_\rho, V_\varphi, V_z)$ 에 대한 $\vec{\nabla}\times\vec{V}$ 를 나타내시오.

(h) Laplacian $\nabla^2\psi = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\psi$ 를 Circular Cylinder Coordinate에서 구하시오.

4. Gauss-Jordan Elimination을 이용하여 다음 행렬의 역행렬을 구하시오. 이 때, 검산 과정을 반드시 포함시키시오 (10점).

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

5. 다음 행렬 A 의 eigenvalue λ 와 eigenvector를 찾고, 이들의 기하학적 의미를 설명하시오. 이 때, $trace(A) = \sum_i \lambda_i$ 를 만족하는지, 그리고 eigenvector들이 서로 직교하는지 확인하시오 (10점).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. 다음 수열들의 수렴 여부를 판단하시오 (10점).

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{8^n}$

7. 함수 $f(x) = e^{2x}$ 를 $x = 0$ 부근에서 Taylor Expansion으로 표현하고, 수렴할 조건을 구하시오 (10점).

수고했습니다.